LAHENDUSED 12.klass

1. Vastus: **334**

Lahendus:
Kuna arvud a, 12, b on aritmeetilise jada kolm järjestikust liiget, siis $(a+b)=2\cdot 12$, järelikult $(a+b)^2=24^2$. Avaldame summa a^2+b^2:

$$a^2+2ab+b^2=24^2$$
$$a^2+b^2=576-2ab.$$

Kuna arvud a, 11, b on geomeetrilise jada kolm järjestikust liiget, siis $a\cdot b=121$.
Seega

$$a^2+b^2=576-2\cdot 121=334$$

Hindamine:

Artimeetilise jada omaduse kasutamine: $(a+b)=24$	1p
Geomeetrilise jada omaduse kasutamine: $a\cdot b=121$	1p
Summa a^2+b^2 avaldamine ning korrutise *ab* asendamine	4p
Õige vastus	1p
	7p

2. Vastus: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$**, kus** k **on täisarv.**

Lahendus 1:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$$

Seega same

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$= \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

Siit $\cos 2x = -1$, kust $2x = \pi + 2\pi k$ ja $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, kus k on täisarv.

Hindamine 1:

Siinuste vahe valemi rakendamine:	1p
Siinuste summa valemi rakendamine:	1p
Teisendamine kujule $\frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)$	1p
Teisendamine võrrandiks $\cos 2x = -1$	2p
$2x$ avaldamine:	1p
Õige vastus:	1p
	7p

Lahendus 2:

Nii nagu lahenduses 1 näitame, et $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)$. Edasi teisendame

$$\frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2}(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) = \cos^2 x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

millest same et $\cos^2 x = 0$, kust omakorda $\cos x = 0$. Siit $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, kus k on täisarv.

Hindamine 2:

Siinuste vahe valemi rakendamine:	1p
Siinuste summa valemi rakendamine:	1p
Teisendamine kujule $\frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)$	1p
Teisendamine võrrandiks $\cos^2 x = 0$	1p
Teisendamine võrrandiks $\cos x = 0$	1p
x avaldamine:	2p
	7p

Lahendus 3

Kasutame valemit

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

Saame

$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(-2x) - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

Siit $\cos 2x = -1$, kust $2x = \pi + 2\pi k$ ja $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, kus k on täisarv.

Hindamine 3:

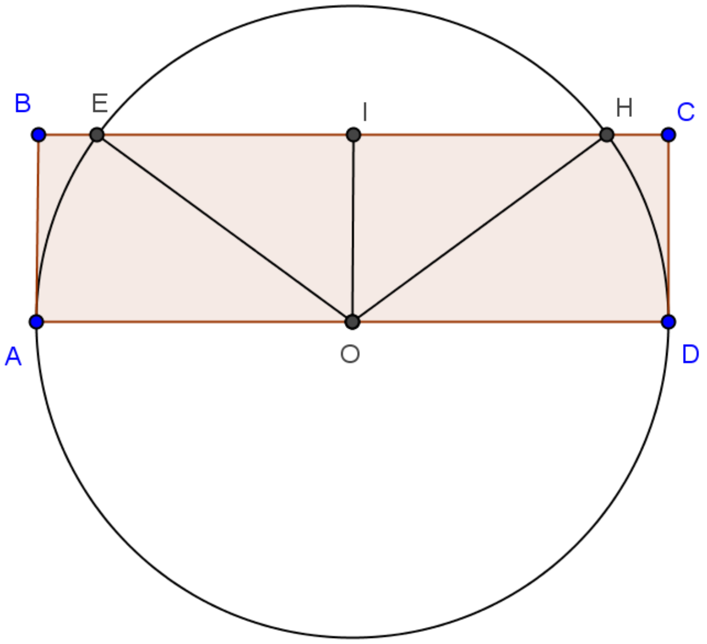
Siinuste korrutise valem:	2p
Teisendamine võrrandiks $\cos 2x = -1$	3p
$2x$ avaldamine:	1p
Õige vastus:	1p
	7p

Märkused:

- Õigeks tuleb lugeda vastust nii radiaanides kui kraadides (90+180*k* kraadi, kus *k* on täisarv).
- Osaline lahendus saab punkte ainult ühe lahenduse skeemi eest (sellise eest, mis annab punkte kõige rohkem).
- Õige lahenduse korral kontrolli puudumise eest punkte mitte maha võtta.
- Kui võrrandi lahendiks pakutud üks arv (näiteks $\frac{\pi}{2}$) anda muidu õige lahenduse korral 6 punkti.
- Ainult täieliku õige vastuse eest koos kontrolliga anda 2 punkti. Ainult täieliku õige vastuse eest ilma kontrollita anda 1 punkt.
- Ainult ühe õige vastuse eest koos kontrolliga anda 1 punkt. Ainult ühe õige vastuse eest ilma kontrollita anda 0 punkti.

3. Vastus: $S = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$ cm^2

Lahendus



Olgu E ja H ringjoone lõikepunktid küljega BC ning I külje BC keskpunkt. Ringjoone radius on r=2 cm, järelikult |OE|=|OH|=2 cm. Täisnurkses kolmnurgas OIE kaatet |OI|=1 cm. Saame $\sin\angle OEI = \frac{|OI|}{|OE|} = 0{,}5$, järelikult $\angle OEI = 30° = \frac{\pi}{6}$. Põiknurkadest saame $\angle AOE = \angle OEI = \frac{\pi}{6}$, analoogiliselt ka $\angle DOH = \frac{\pi}{6}$.

Sektori pindala leiame valemist $= \frac{r^2\alpha}{2}$:

$$S_{AOE} = S_{DOH} = \frac{2^2 \cdot \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{3}\ (\text{cm}^2)$$

Pythagorase teoreemist kolmnugas EIO (või nurga koosinuse kaudu) leiame, et $|\mathrm{EI}| = \sqrt{3}$ (cm), siit $|EH| = 2|\mathrm{EI}| = 2\sqrt{3}$ (cm).

Kolmnurga EOH pindala on

$$S_{EOH} = \frac{|EH| \cdot |IO|}{2} = \sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

Kokku saame

$$S = S_{AOE} + S_{DOH} + S_{EOH} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

Hindamine:

Leitud OE (või OH) pikkus:	1p
Leitud nurk AOE (või DOH):	2p
Leitud kolmnurga EOH pindala:	2p
Leitud sektori AOE (või DOH) pindala:	1p
Leitud ringi ja ristküliku ühise osa pindala:	1p
	7p

4. <u>Lahendus:</u>

$$n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \geq n \cdot \sqrt[n]{n+1}$$

$$\frac{n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} \geq \sqrt[n]{n+1}$$

Püüame murru $\frac{n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$ lugejas esinevat avaldist teisendada kujule, mille korral oleks liidetavate korrutis võrdne avaldisega $n+1$ (ning liidetavate arv oleks *n*), selleks aga asendame esimese liidetava *n* avaldisega 1 + 1 + ... + 1 (*n* liidetavat). Saame

$$\frac{n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} = \frac{2+1\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n},$$

kusjuures

$$2 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1.$$

Saame võrratuse kujul

$$\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}}{n} \geq \sqrt[n]{n+1}.$$

Viimane võrratus on aga tõene Cauchy võrratuse järgi .

<u>Hindamine:</u>

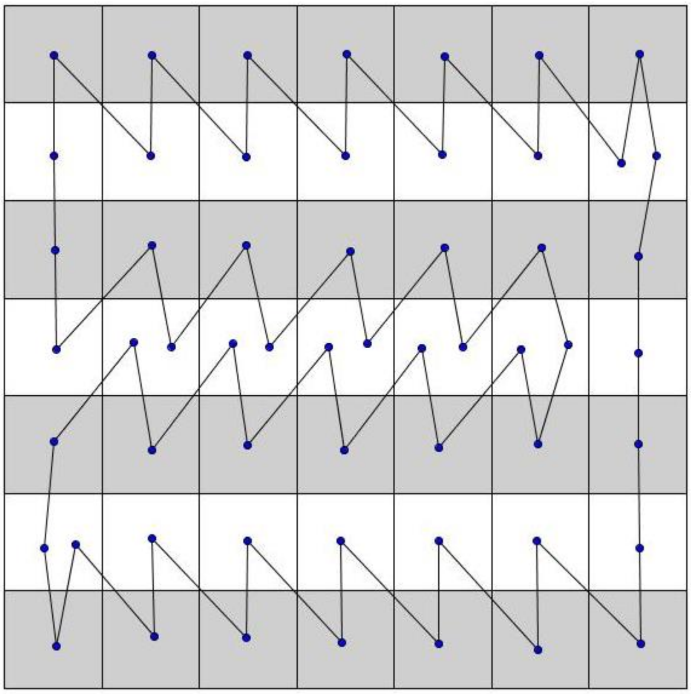
Mõistmine, et avaldist $n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ tuleb teisendada nii, et selle liidetavate korrutis oleks $n+1$ (ning liidetavate arv *n*)	2p
n asendamine summaga 1 + 1 + ... + 1 (*n* liidetavat)	1p
Jõudmine avaldiseni $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}$	2p
$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1$ näitamine	1p
Cauchy võrratuse kasutamine	<u>1p</u>
	7p

5. Vastus: **56 sammu.**

Lahendus:

Märkame, et 7x7 ruudustikku read on värvitud mustaks ja valgeks nii, et teine, neljas ja kuues read on valged ja ülejäänud mustad, siis tuleb välja, et ükskõik kuidas kilpkonn käib tema ruudu värv muutub. Ehk kuna meil on 28 musta ruutu ja kilpkonn peab külastama kõike ruute, siis ta peab tegema vähemalt 28 korda 2, ehk 56 sammu.

Näitame selle variandi:



Hindamine:

Põhjendamine, et alla 56 käiku olla ei saa	4p
Väljatoodut variant, kus on tehtud 56 sammu	2p
Õige vastus	1p
	7p